Soluzione Problemi

1.

I punto. Per prima cosa notiamo che la funzione $g(x)$ e continua. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$$

quindi è anche limitata.
Per dimostrare che un massimo e minimo assoluto esistono studiamo la derivata.

$$\begin{aligned} g'(x) &= ae^{2x-x^2} + (ax+b)(2-2x)e^{2x-x^2} \\ &= (a+2b+2(a-b)x-2ax^2)e^{2x-x^2} \end{aligned}$$

Facciamo lo studio del segno.
La seconda parte, e^{2x-x^2}, è sempre positiva, quindi limitiamoci a studiare la prima, $(a+2b+2(a-b)x-2ax^2)$, che per brevità chiameremo $h(x)$.
Se $a \neq 0$, $h(x)$ è un polinomio di secondo grado, quindi ha due soluzioni se e solo se il suo discriminante Δ è positivo.

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(a^2+b^2-2ab) - 4(-2a)(a+2b) \\ &= 4(3a^2+2ab+b^2) \\ &= 4(2a^2+(a+b)^2)) \end{aligned}$$

che è sempre positivo.
Ne segue che $g(x)$ ha sempre due punti stazionari: se $a > 0$ la concavità è verso il basso, quindi il primo punto stazionario sarà un minimo ed il secondo un massimo, se invece $a < 0$ la concavità è verso l'alto, ed i ruoli si invertiranno.

Adesso, per trovare i valori dei parametri richiesti, imponiamo il sistema, in cui richiediamo che le funzioni si intersechino in ascissa $x = 2$, e che il loro valore sia 1.

Otteniamo

$$\begin{cases} f(2) = g(2) \\ f(2) = 1 \end{cases}$$

Soluzione a cura di:
Luca Campagna, Vittorio Soleo,
Matteo Fè, Andrea Drago,
Simone Cici, Aser Osman,
Davide Roncolini,Ettore Stromboli

$$\begin{cases} 4a - 2 + b = (2a + b)e^0 \\ 4a - 2 + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

II punto. Facciamo lo studio delle funzioni, partiamo da $f(x) = x^2 - x - 1$, che è una parabola.
Il dominio è tutta la retta reale: $D = \mathbb{R}$.
Le intersezioni con l'asse delle ascisse sono $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
La concavità verso l'alto, quindi $f(x)$ è negativa tra i due zeri, e positiva all'esterno.
La derivata è $f'(x) = 2x - 1$ che si annulla in $x = \frac{1}{2}$, l'ordinata corrispondente è $f(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$

Passiamo alla seconda funzione,

$$g(x) = (x - 1)e^{2x - x^2}$$

.
Anche qua, come abbiamo già detto il dominio è tutta la retta reale: $D = \mathbb{R}$.
Per lo studio del segno basta guardare la parte a sinistra, $x - 1$, perché l'esponenziale è sempre positivo; quindi $g(x)$ si annulla in $x = 1$, è negativa prima e positiva dopo.
La derivata è

$$g'(x) = (1 + (x - 1)(2 - 2x))e^{2x - x^2} = (-2x^2 + 4x - 1)e^{2x - x^2}$$

che si annulla in

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Per studiarne il segno basta guardare la prima parte, visto che l'esponenziale sempre positivo. La concavità è verso il basso, quindi $g(x)$ è decrescente negli intervalli $(-\infty; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \infty)$, mentre è crescente fra i due punti stazionari. In particolare $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un minimo, e $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ un massimo.
Come abbiamo già notato la funzione ha asintoti orizzontali a più e meno infinito, di equazioni $y = 0$.

Possiamo verificare che $g(x)$ è antisimmetrica rispetto al punto $(1; 0)$. Per fare questo dobbiamo verificare che

$$-g(x) = g(-(x-1)+1)$$

dove a secondo membro abbiamo traslato la funzione nell'origine, ribaltata, e ritraslata a destra.
Adesso verifichiamo che le due funzioni siano tangenti nel punto $B(0;-1)$. Affinché questa condizione sia verificata le due funzioni devono passare per questo punto, e la retta tangente deve avere lo stesso coefficiente angolare, cioè la derivata deve assumere lo stesso valore in 0.
Sostituendo i valori all'interno delle funzioni otteniamo

$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(0) = -1 \\ g'(0) = -1 \end{cases}$$

Ora calcoliamo l'area della regione compresa fra le due curve. Per prima cosa notiamo che queste si intersecano nei punti $A(2;1)$ e $B(0;-1)$, e che $g(x) \geq f(x)$ nell'intervallo compreso fra essi. Allora per calcolare l'area bisogna valutare l'integrale

$$\int_0^2 g(x) - f(x)dx = \int_0^2 g(x)dx - \int_0^2 f(x)dx$$

Siccome è antisimmetrica rispetto al punto $(1,0)$ il suo integrale in questo intervallo è nullo. Rimane

$$-\int_0^2 f(x) = \frac{4}{3}$$

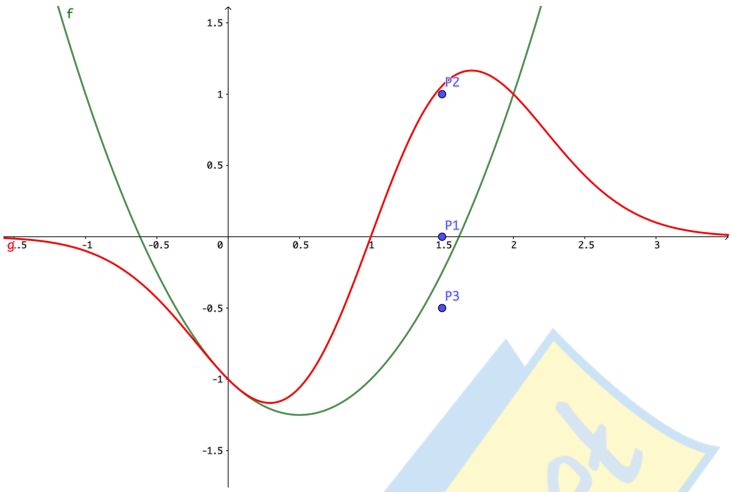

Figura 1: Grafico della funzione f in verde e g in rosso

III punto. Per valutare come varia la circuitazione del campo magnetico applichiamo la legge di Ampère

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica nel vuoto ed i le correnti concatenate al circuito.
Dal grafico notiamo che la corrente i_3, essendo esterna alla regione, non influenza in alcun modo la circuitazione di $\vec{B}$ intorno a S.
Se i_2 è concorde con i_1 la circuitazione aumenta, viceversa diminuisce. In particolare, se $i_2 = 2A$ ed è uscente dalla regione, la circuitazione di $\vec{B}$ risulta nulla.

IV punto. Calcoliamo la velocità angolare necessaria ad avere una corrente indotta nel circuito con valore massimo pari a $5mA$.
Per fare questo ricordiamoci la legge di Faraday-Neumann-Lenz

$$fem = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Quindi la corrente indotta è data da

$$i_{ind} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Valutiamo il flusso di $\vec{B}$ attraverso la superficie S quando essa è posta in rotazione intorno all'asse x con velocità angolare ω costante.
Calcoliamo il flusso di $\vec{B}$

$$\Phi_S(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = B \cdot S \cdot \cos(\omega t)$$

e dopo averlo derivato lo sostituiamo nell'espressione della corrente indotta

$$i_{ind} = \frac{B \cdot S \cdot \omega}{R} \sin(\omega t)$$

Siccome stiamo cercando il valore massimo, consideriamo $\sin(\omega t) = 1$ ed invertendo la formula otteniamo

$$\omega = \frac{R \cdot i_{ind}}{B \cdot S} = \frac{0,2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{\frac{4}{3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}}$$

da cui finalmente, $\omega = 5 \cdot 10^{-2} \frac{rad}{s}$

2.

I punto.

Iniziamo con l'analisi dimensionale delle costanti a e k presenti nella formula

$$B = \frac{k \cdot t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r$$

Osservando il denominatore notiamo che a e t vengono sommate, quindi devono avere le stesse dimensioni, quelle di un tempo: $[a] = [s]$.
Per k ricordiamoci le dimensioni del campo magnetico, che si misura in Tesla

$$[T] = \frac{[Kg]}{[s]^2 \cdot [A]}$$

quindi

$$[k] = \frac{[Kg] \cdot [s]}{[A] \cdot [m]}$$

Il motivo per cui è presente un campo magnetico all'interno delle armature del condensatore si deduce dalla legge di Ampère-Maxwell

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}) \tag{1}$$

e dipende dalla variazione del flusso del campo elettrico. Infine ricordiamoci che le direzioni del campo magnetico $\vec{B}$ e del campo elettrico $\vec{E}$ sono sempre perpendicolari.

II punto.

Consideriamo di nuovo la legge di Ampère-Maxwell (1), nella quale non compaiono correnti concatenate, e diventa quindi

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} \tag{2}$$

Data la geometria del problema notiamo che il campo magnetico risulta costante lungo la circonferenza C, quindi possiamo facilmente calcolare l'integrale a primo membro, moltiplicando l'espressione del campo magnetico per la lunghezza della circonferenza.

$$\frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} = \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}$$

Otteniamo quindi un'equazione differenziale del primo ordine. Per ricavare il flusso di $\vec{E}$ la risolviamo integrando in dt

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \int t(t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} dt$$

E quindi

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{-2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + c_1$$

Per determinare la costante di integrazione c_1 imponiamo che il flusso di $\vec{E}$ al tempo $t = 0$ sia nullo, ed otteniamo

$$c_1 = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{1}{a} \tag{3}$$

Per calcolare la differenza di potenziale ricaviamo il campo elettrico $\vec{E}$ dividendo il suo flusso per l'area della superficie delimitata da C, e poi lo moltiplichiamo per la distanza fra le due armature.
Otteniamo

$$\Delta V = Ed = \frac{2kd}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right)$$

Infine valutiamo il valore a cui tende il modulo del campo magnetico. Notiamo che per t che tende a più infinito il flusso di $\vec{E}$ tende a $\frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0 a}$, che è una costante, quindi la sua variazione tende a 0. Il secondo membro dell'Equazione di Ampère-Maxwell (2) sarà zero. Ne segue che anche il campo magnetico sarà nullo.

III punto.

Consideriamo la funzione $f(t)$ data, con il parametro $a > 0$.
Per verificare che la funzione

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a}$$

Possiamo sia derivare F, che integrare f: nel primo caso otteniamo esattamente

$$F'(t) = f(t)$$

nel secondo caso

$$\int f(t)dt = \int -t(t^2 + a^2) - \frac{3}{2}dt = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^a}} + c$$

compare una costante di integrazione c, che in questo caso vale $-\frac{1}{a}$. Sostituendo $x = 0$ nella primitiva vediamo che $F(0) = 0$ e quindi la primitiva data è effettivamente quella che passa per l'origine.
Studiamo la funzione $F(t)$.
Il dominio è tutta la retta reale: $D = \mathbb{R}$, perché $a > 0$, e quindi il denominatore non si annulla mai.
Notiamo che $F(t) = F(-t)$ quindi la funzione è pari.
Calcolando i limiti

$$\lim_{x \to \pm\infty} F(t) = 0 - \frac{1}{a}$$

e quindi concludiamo che la funziona ha un asintoto orizzontale a destra e a sinistra, di equazione

$$y = -\frac{1}{a}$$

F è la primitiva di f, quindi f è la derivata di F.
Studiamo il segno di f: il denominatore è sempre positivo, quindi basta studiare il numeratore.
Ne segue subito che la funzione F presenta un unico punto stazionario in $x = 0$, che è un massimo relativo

Cerchiamo i flessi. Calcoliamo la derivata seconda, usando la regola di derivazione dei quozienti e otteniamo

$$F''(t) = \frac{-a^2 + 2t^2}{(a^2 + t^2)\sqrt{(a^2 + t^2)^3}}$$

Anche in questo caso il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi per trovare i flessi basterà cercare i punti in cui si annulla il numeratore.
Troviamo $t_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Siccome la derivata seconda si annulla in due punti la funzione presenta esattamente due flessi. Calcolando la derivata prima in questi punti otteniamo la pendenza delle rette tangenti in essi : $F'(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a) = \pm\frac{\sqrt{3}}{18a^2}$

IV punto.

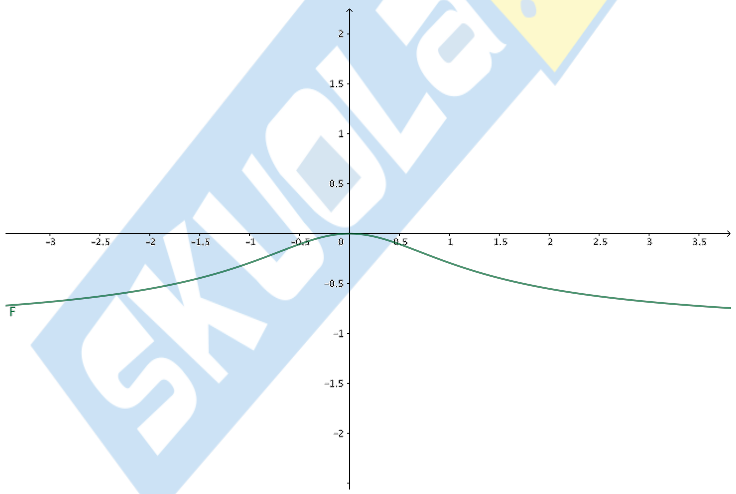

Figura 2: Grafico della funzione F

$f(t)$ è la derivata di $F(t)$, quindi i punti di flesso di $F(t)$ sono punti stazionari di $f(t)$; inoltre, dove $F(t)$ è crescente (per $t < 0$) $f(t)$ è positiva, viceversa nei punti in cui $F(t)$ è decrescente (per $t > 0$), $f(t)$ è negativa.
Il massimo di $F(t)$ corrisponde ad uno zero di $f(t)$.

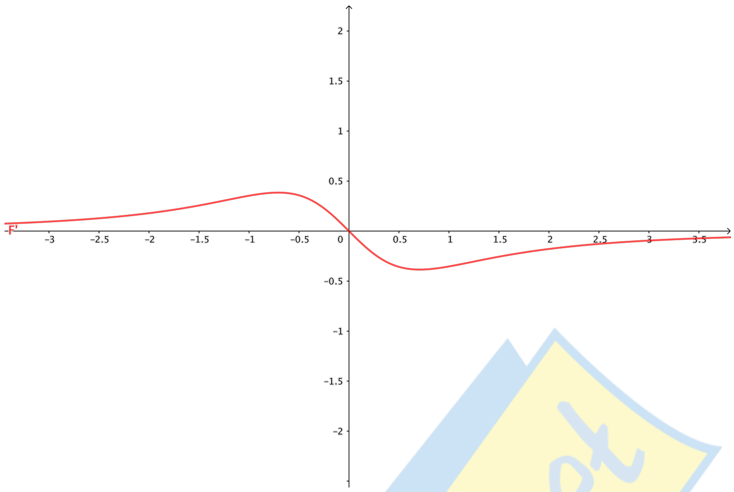

Figura 3: Grafico della funzione $F' = f$

Data la simmetria della funzione, che è dispari, l'area richiesta può essere calcolata come

$$\int_{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} |f(t)|dt = 2\int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} f(t)dt = 2\left[\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right]_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 2\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{a\sqrt{3}}\right]$$

Per $b > 0$ l'integrale

$$\int_{-b}^{b} f(t)dt$$

può essere calcolato sfruttando la stessa simmetria, e quindi

$$\int_{-b}^{b} f(t)dt = 2\int_0^{b} f(t)dt = 2\left[\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}} - \frac{1}{a}\right]$$

Soluzione quesiti

1.

$$f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d} \qquad d \in \mathbb{R}, p(x) \text{ polinomio}$$

Inoltre $f(0) = 0$ e $f(\frac{12}{5}) = 0$ e asintoti $x = 3$, $x = -3$ e $y = 5$. Dunque:

$$\lim_{x\to 3}\frac{p(x)}{x^2+d}=\infty \qquad \lim_{x\to -3}\frac{p(x)}{x^2+d}=\infty$$

Quindi $9+d=0 \Rightarrow d=-9,\ f(x)=\frac{p(x)}{x^2-9}$, mentre

$$f(0)=0 \quad \Rightarrow 0=\frac{p(0)}{-9}, \quad p(0)=0$$

$$f(\frac{12}{5})=0 \quad \Rightarrow 0=\frac{p(\frac{12}{5})}{\frac{144}{25}-9}, \quad p(\frac{12}{5})=0$$

$y=5$ asintoto per f quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{x^2-9}=5$$

dunque $p(x)$ polinomio di II grado $p(x)=ax^2+bx+c$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-9}=5 \quad \Rightarrow a=5$$

inoltre $p(0)=0$ e $p(\frac{12}{5})=0$ implicano $b=-12$ e $c=0$. LA funzione diventa

$$f(x)=\frac{5x^2-12x}{x^2-9}$$

La derivata prima diventa

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(10x-12)(x^2-9)-(5x^2-12x)(2x)}{(x^2-9)^2} = \\ &= \frac{10x^3-90x-12x^2+108-10x^3+24x^2}{(x^2-9)^2} = \\ &= \frac{12x^2-90x+108}{(x^2-9)^2} = 6\frac{2x^2-15x+18}{(x^2-9)^2} \end{aligned}$$

imponendo $f'(x)=0$ otteniamo $2x^2-15x+18=0$ cioè $x_1=6$ e $x_2=\frac{3}{2}$ tramite lo studio del segno si osserva che f' è positiva in $(-\infty,-3)\cup(\frac{3}{2},3)\cup(6,+\infty)$ mentre è negativa in $(-3,\frac{3}{2})\cup(3,6)$ pertanto $x=\frac{3}{2}$ e $x=6$ sono minimi propri per f.

Soluzione a cura di:
Luca Campagna, Vittorio Soleo,
Matteo Fè, Andrea Drago,
Simone Cici, Aser Osman,
Davide Roncolini,Ettore Stromboli

2.

Per prima cosa notiamo che la funzione $g(x)$ si annulla per $x = 0$.
Ora dimostriamo che questo è l'unico zero reale. Per fare questo studiamone la derivata.
Essendo un polinomio è facile da calcolare:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{1010}(2n-1)x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{1010}(2n-1)(x^{n-1})^2$$

Ora notiamo che ogni monomio che compare in $g'(x)$ ha davanti a se un coefficiente positivo, ed è elevato al quadrato. Quindi possiamo subito dire che

$$g'(x) > 0$$

Quindi $g(x)$ è strettamente crescente, ed interseca l'asse delle ascisse in al più un punto.
Adesso passiamo a calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1,1^x} = 0$$

Infatti lo possiamo anche riscrivere come

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{e^{x log(1,1)}}$$

e notiamo che $log(1.1) > 0$.
Adesso è evidente che abbiamo il limite di un polinomio diviso un esponenziale con coefficiente positivo, e quindi risolviamo la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

Soluzione a cura di:
Luca Campagna, Vittorio Soleo,
Matteo Fè, Andrea Drago,
Simone Cici, Aser Osman,
Davide Roncolini,Ettore Stromboli

3.

Notiamo che la superficie di un parallelepipedo rettangolo a base quadrata è data da $S = 2b^2 + 4bh$ con b e h rispettivamente la lunghezza dello spigolo della base e l'altezza del parallelepipedo, la somma degli spigoli invece è data dalla funzione $\mathcal{S}(b,h) = 8b + 4h$ che può essere ridotta ad una variabile notando che $4h = \frac{S}{b} - 2b$ dall'equazione della superficie, quindi abbiamo

$$\mathcal{S}(b) = 6b + \frac{S}{b}$$

Studiamo la derivata prima e vediamo quando si annulla per trovare il minimo

$$\mathcal{S}'(b) = 6 - \frac{S}{b^2}$$

$\mathcal{S}'(b) = 0$ dunque

$$6 - \frac{S}{b^2} = 0 \qquad \Rightarrow b = \frac{\sqrt{6S}}{6}$$

Quindi parallelepipedo con superficie S e somma degli spigoli minima ha base $b = \frac{\sqrt{6S}}{6}$ e altezza $h = \frac{\sqrt{6S}}{4}(1 - \frac{1}{3}) = b$. Ovvero è il cubo.

4.

Per ricavare l'equazione della sfera cercata è sufficiente andare a calcolare, a partire da un generico punto $P(x, y, z)$ appartenente al luogo geometrico cercato, le distanze $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2}$$
$$\overline{PB} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$$

Impongo la condizione $\overline{PA} = \sqrt{2} \cdot \overline{PB}$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$$

elevando tutto al quadrato si ha

$$x^2 + 4 - 4x + y^2 + z^2 + 1 + 2z = 2(x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 2z + 9)$$

e, svolgendo i calcoli, abbiamo

$$S : x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$$

Soluzione a cura di:
Luca Campagna, Vittorio Soleo,
Matteo Fè, Andrea Drago,
Simone Cici, Aser Osman,
Davide Roncolini,Ettore Stromboli

l'equazione di una sfera con raggio $r = \sqrt{48}$ e centro $C = (-6, 4, 3)$ per verificare che il punto $T = (-10, 8, 7)$ appartiene alla sfera è sufficiente imporre il passaggio per il punto T e otteniamo

$$100 + 64 + 49 - 120 - 64 - 42 + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

da cui deduciamo che $T \in S$.
Per ricavare l'equazione del piano richiesto calcoliamo i coefficienti direttori del piano tangente alla sfera, riscriviamo l'equazione della sfera in forma canonica mediante l'uso del completamento dei quadrati e otteniamo

$$x^2 + 36 - 36 + y^2 + 16 - 16 + z^2 + 9 - 9 + 13 + 12x - 8y - 6z = 0$$
$$(x^2 + 6)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 48$$

considerato il centro della sfera $C = (-6, 4, 3)$ i parametri direttori del piano sono dati da $T - C = (-4, 4, 4)$ l'equazione del piano è

$$\Pi : -4x + 4y + 4z + d = 0$$

ricaviamo d imponendo il passaggio per T quindi

$$d = -100$$

quindi

$$\Pi : -x + y + z = 25$$

5.

I casi possibili in tutti e tre i punti sono disposizioni con ripetizioni

$$D^r_{n,k} = D^r_{6,4} = 6^4$$

poiché abbiamo 6 facce e 4 dadi.

a) $A = \{$"Somma delle facce minore di 5"$\}$ i casi favorevoli sono: capitano quattro "1" oppure tre "1" e un "2"

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Dunque abbiamo 5 casi quindi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{6^4} \approx 0.38\%$$

b) $B = \{$"Il prodotto delle faccia sia multiplo di 3"$\}$ applichiamo la variabile aleatoria $X =$ #volte che esce 3 o 6 il prodotto dei 4 lanci è un multiplo di 3 se almeno uno dei lanci contiene 3 o 6, $n = 4$, $k \geq 1$ dove k è il numero di volte che si verifica B allora

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(k = 0)$$

Chiamiamo $p = \mathbb{P}(\text{"esce un multiplo di 3"}) = \frac{1}{3}$ allora

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{4}{0} p^0 (1-p)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

Quindi in conclusione

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81} \approx 0.8\%$$

c) $C = \{$"Il valore massimo è 4"$\}$ i casi favorevoli sono disposizioni con ripetizione in cui $n = 4$ e $k = 4$ quindi

$$\mathbb{P}(C) = \frac{4^4}{6^4} \approx 19.7\%$$

6.

$R = 4.0m\Omega$, $A = 30cm^2 = 3 \times 10^{-3} m^2$ e $\vec{B} \perp \vec{n}$ dove $\vec{n}$ versore di S. Per la legge di Faraday-Neumann la variazione del flusso del campo magnetico rispetto ad un intervallo di tempo genera una forza elettromotrice indotta

$$f_{em} = q\vec{U} \times \vec{B}$$

Il verso della corrente indotta è sempre tale da opporsi alla variazione di flusso che genera, ciò per evitare una violazione del principio di conservazione dell'energia.

a) $\Delta t = 3ms$

$$\Delta\Phi_s(\vec{B}) = \Delta B(t) \cdot S = [B(3) - B(0)] \cdot S = [-0.2 \times 10^{-3} - 0] \cdot 3 \times 10^{-3} =$$
$$= -0.6 \times 10^{-6} T \cdot m^2$$

Soluzione a cura di:
Luca Campagna, Vittorio Soleo,
Matteo Fè, Andrea Drago,
Simone Cici, Aser Osman,
Davide Roncolini,Ettore Stromboli

$$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi_s(\vec{B})}{\Delta t} = \frac{+0.6 \times 10^{-6}}{(3.0-0) \times 10^{-3}} = 0.2 \times 10^{-3} V$$

Dalla legge di Ohm: $V = IR$, $I = \frac{\Delta V}{R}$ quindi si ha

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{0.2 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} = 0.05A$$

b) $\Delta t = 2ms$

$$\Delta\Phi_s(\vec{B}) = \Delta B(t) \cdot S = [B(5) - B(3)] \cdot S = 1.2 \times 10^{-6} T \cdot m^2$$

La corrente sarà:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{1}{R} \cdot \left(-\frac{\Delta\Phi_s(\vec{B})}{\Delta t} \right) = -0.15A$$

c) $\Delta t = 5ms$

$$\Delta\Phi_s(\vec{B}) = \Delta B(t) \cdot S = [B(10) - B(5)] \cdot S = -0.6 \times 10^{-6} T \cdot m^2$$

$$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi_s(\vec{B})}{\Delta t} = 0.12 \times 10^{-3} V$$

$$I = \frac{\Delta V}{R} = 0.03A$$

7.

Nel sistema del laboratorio la velocità della particella è data da:

$$V_{Lab} = \frac{25 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-9}} = 1.25 \times 10^{8} m/s$$

Nel sistema in movimento avviene una trasformazione della velocità data da:

$$V_{Mov} = \frac{V_{Lab} - \beta}{1 - \frac{\beta \times V_{Lab}}{c^2}} \quad \text{dove} \quad \beta = 0.8c$$

Numericamente

$$V_{Mov} = \frac{1.25 \times 10^{8} - 0.8 \times 3 \times 10^{8}}{1 - \frac{1.25 \times 0.8 \times 3}{9}} = \frac{-1.15 \times 10^{8}}{0.67} = -1.7 \times 10^{8} m/s$$

Le distanze ed il tempo si determinano dalla contrazione delle lunghezze e dalla dilatazione del tempo

$$t' = \gamma \times t_{proprio}$$
$$L' = \frac{L_{proprio}}{\gamma}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \approx 1.7$$

da cui

$$t' = 3.4ns$$
$$L' = 14.7cm$$

8.

$\vec{B} = 1mT$ $\Delta x = 38.1cm$, $r = 10.5cm$.
Una carica entrante in una regione di spazio soggetta ad un campo magnetica subisce l'azione della forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = q\vec{U} \times \vec{B}$$

La carica subisce la sovrapposizione dei due moti:
- moto circolare uniforme ($\vec{B}_\perp$)
- moto rettilineo uniforme ($\vec{B}_\parallel$)

La sovrapposizione dei moti genera un moto elicoidale

$$\vec{F}_L = ma$$

$a = \frac{V^2}{r}$ perché l'accelerazione centripeta è $q\vec{U} \times \vec{B} = m \cdot \frac{V_\perp^2}{r}$

$$qvD \sin\alpha = \frac{mV_\perp^2}{r} \cdot (1)$$

quindi

$$V_\perp = \frac{rqB}{m} = \frac{10.5 \times 10^{-2} \cdot 1.602 \times 10^{-19} \cdot \times 10^{-3}}{1.673 \times 10^{-27}} = 1 \times 10^4 m/s$$

$\Delta x = V_\parallel \cdot \frac{1}{f} = V_\parallel \frac{2\pi}{\omega}$ ma $\omega = \frac{q}{m}B = \frac{V}{r}$ dunque $\Delta x = \frac{V_\parallel 2\pi m}{qB}$ da cui

$$V_\parallel = \frac{qB\Delta x}{2\pi m} = 5.8 \times 10^3 m/s$$

Note $V_\parallel$ e $V_\perp$ abbiamo

$$V = \sqrt{V_\parallel^2 + V_\perp^2} = 1.156 \times 10^4 m/s$$
$$\sin\alpha = \frac{mV_\perp}{rqB} = 0.99$$
$$\alpha = \arcsin(0.99) = 84.0375°$$

Soluzione a cura di:
Luca Campagna, Vittorio Soleo,
Matteo Fè, Andrea Drago,
Simone Cici, Aser Osman,
Davide Roncolini,Ettore Stromboli